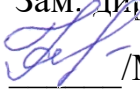


**Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Школа № 176 с углубленным изучением отдельных предметов»
городского округа Самара**

РАССМОТРЕНО	ПРОВЕРЕНО	УТВЕРЖДЕНО
на заседании МО естественно- математического цикла	Зам. директора по УВР  /Машарова О.Н. /	Директор МБОУ Школы № 176 г. о. Самара
Протокол № 5 от 30.08. 2022 г.	«30»августа2022 г.	_____ Девятова Е.Н. Приказ № 475-од от 31.08. 2022 г.

**Рабочая программа внеурочной деятельности
«Олимпиадная математика»
(5-9 классы)**

Пояснительная записка

Примерная рабочая программа внеурочной деятельности «Олимпиадная математика» для 5–9 классов общеобразовательных организаций разработана на основе ФГОС основного общего образования, Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России, Рабочей концепции одаренности, дидактической системы «Учусь учиться» (Л. Г. Петерсон), примерной рабочей программы курса внеурочной деятельности «Олимпиадная математика. 1–9 классы», разработанной в НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики» (Институт СДП) — Федеральной инновационной площадке Министерства просвещения. Реализует «Концепцию выращивания способностей и одаренности».

Института СДП применительно к выращиванию математических способностей и одаренности.

Программа направлена на выращивание математических способностей и одаренности детей, их общеинтеллектуальное и личностное развитие, повышение качества подготовки к математическим олимпиадам и качества математического образования в целом.

Общая характеристика курса

Математические олимпиады в настоящее время принято считать элитным направлением: в них вовлечено ограниченное число школьников, чаще всего из математических классов или профильных образовательных организаций. При этом мощный ресурс олимпиадной математики как эффективного инструмента интеллектуального и личностного развития детей в массовой школе используется недостаточно.

Олимпиадные задачи — это, как правило, нестандартные задачи, поэтому для их решения недостаточно просто применить приобретенные на уроках знания и умения. Решение любой олимпиадной задачи — это всегда пусть маленькое, но открытие, демонстрирующее красоту математической

мысли и позволяющее пережить радость творчества и удовольствие от интеллектуальной деятельности. Решение олимпиадных задач развивает у каждого ребенка глубину и гибкость мышления, воображение, самостоятельность и трудолюбие, творческие способности, повышает интерес к математике и уровень математической подготовки. Поэтому вовлечение в олимпиадную математику важно для всех учеников: математически одаренные дети в творческой среде смогут полнее реализовать свой потенциал и вырастить свой математический талант, сохраняя физическое и психическое здоровье, а все остальные — развить свои математические способности и успешнее учиться, что пригодится в любом деле.

Между тем можно выделить целый ряд проблем, создающих препятствия для привлечения в олимпиадную среду учащихся массовой школы: недостаточная мотивация школьников к участию в олимпиадном движении, «оторванность» олимпиадной математики от основного школьного курса, недостаточная системность олимпиадной подготовки, отсутствие преемственности между разными уровнями образования.

Целью курса «Олимпиадная математика» является системная подготовка учащихся 5–9 классов к математическим олимпиадам, ориентированная на вовлечение школьников в математическую деятельность, развитие мотивации, мышления, творческих способностей и за счет этого — достижение более высокого уровня их олимпиадной и общей математической подготовки.

Концептуальная идея данного курса состоит в том, чтобы на основе системно-деятельностного подхода разработать педагогический инструментарий (учебное содержание, технологии, методики, методическое обеспечение) непрерывной олимпиадной подготовки по математике в 5–9 классах, организовать обучение и методическое сопровождение учителей, стремящихся повысить мотивацию и качество математической подготовки своих учеников.

Место курса в учебном плане

Курс «Олимпиадная математика» является курсом внеурочной деятельности.

Программа ознакомительного предназначена для учащихся 5–6 классов и рассчитана на 136 ч (по 2 ч в неделю 5 и 6 классах).

Программа практического этапа предназначена для учащихся 7–9 классов и рассчитана на 204 ч (по 2 ч в неделю в 7, 8 и 9 классах).

Содержание курса «Олимпиадная математика» структурировано в 21 тематическую линию. Эти линии непрерывно развиваются с 5 по 9 класс, достаточно полно представляют традиции олимпиадной подготовки и углубляют знания школьной программы по математике. Выбор содержания осуществляется с опорой на золотой фонд олимпиадной литературы, проверенные временем методы и приемы решения олимпиадных задач.

Содержание курса на каждом этапе обучения учитывает возрастные особенности развития детей.

I этап — *ознакомительный* (5–6 классы)

Основной задачей данного этапа является знакомство учащихся с базовыми подходами, методами и приемами решения олимпиадных задач в соответствии с содержанием курса «Олимпиадная математика», а также формирование первичного опыта применения этих методов.

II этап — *практический* (7–9 классы)

На данном этапе увеличивается доля самостоятельности учащихся в применении метода рефлексивной самоорганизации при решении олимпиадных задач. Продолжается отработка базовых приемов и методов олимпиадной математики, но основной задачей становится теперь освоение общих подходов к решению нестандартных задач, применение их к решению более сложных, «многоходовых» задач и переход к самостоятельной разработке новых способов.

В результате прохождения учащимися этих этапов открывается возможность не только повысить качество олимпиадной и общей математической подготовки учащихся, но и создать в классе среду уважения к успеху и стремления к успеху, развить их познавательную мотивацию, поддержать психологическое здоровье детей и их личностный рост к высшим уровням развития.

Ознакомительный этап 5–6 классы

Цель этапа: создать для каждого учащегося 5–9 классов общеобразовательной школы возможность качественной олимпиадной подготовки по математике посредством вовлечения в самостоятельную математическую деятельность, развития мышления, мотивации, освоения методов и формирования системного опыта решения олимпиадных математических задач.

Задачи этапа

- 1) создать творческую, доброжелательную, безопасную (с позиций права на ошибку) образовательную среду, ориентированную на поддержку успеха каждого ученика относительно себя;
- 2) вовлечь учащихся на основе системно-деятельностного подхода (система «Учусь учиться») в математическую деятельность, создать возможность самостоятельного открытия ключевых методов и приемов решения математических олимпиадных задач, тренировать умение их применять;
- 3) снять у детей неуверенность и страх при решении нестандартных задач, создать возможность для каждого ученика системно переживать ситуацию успеха, радость победы, получать удовольствие от интеллектуальной математической деятельности;
- 4) сформировать у школьников умение решать нестандартные задачи на основе метода рефлексивной самоорганизации;
- 5) тренировать мыслительные операции, навыки парной и групповой работы, коммуникативные умения в позициях «автора», «понимающего», «критика», «организатора»;

б) создать качественное содержание олимпиадной подготовки по математике, связанное как с содержанием школьного курса математики (за основу взят курс математики «Учусь учиться»), так и с содержанием школьных математических олимпиад разных уровней (вплоть до Всероссийской олимпиады школьников).

Устойчивое мотивационное напряжение учащихся, необходимое для включения в любую коллективную деятельность (в том числе деятельность по решению олимпиадных задач), может проявиться только при условии удовлетворения таких базовых потребностей человека, как потребности в безопасности, причастности (теплых человеческих отношениях) и самоутверждении. Для создания среды, отвечающей этим требованиям, используются приведенные выше методологические и дидактические принципы «Олимпиадной математики», а также конкретизирующие их правила.

Результаты освоения курса

В ходе изучения данного курса вносится существенный вклад в развитие **личностных результатов**:

- формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию;
- формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со взрослыми и сверстниками в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

Формируются и получают развитие следующие **метапредметные результаты**:

Регулятивные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

- целеполаганию, включая постановку новых целей, преобразование практической задачи в познавательную;
- самостоятельно анализировать условия достижения цели на основе учета выделенных учителем ориентиров действия в новом материале;
- планированию путей достижения целей;
- умению самостоятельно контролировать своё время и управлять им;
- адекватно самостоятельно оценивать правильность выполнения действия и вносить необходимые коррективы в исполнение, как в конце действия, так и по ходу его реализации.

Коммуникативные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

- учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве;
- формулировать собственное мнение и позицию, аргументировать и координировать её с позициями партнеров в сотрудничестве при выработке общего решения в совместной деятельности;
- устанавливать и сравнивать разные точки зрения, прежде чем принимать решения и делать выбор;
- задавать вопросы, необходимые для организации собственной деятельности и сотрудничества с партнером;
- осуществлять взаимный контроль и оказывать в сотрудничестве необходимую взаимопомощь.

Познавательные универсальные учебные действия

Обучающийся научится:

- осуществлять поиск необходимой информации для выполнения учебных заданий с использованием учебной литературы;
- создавать и преобразовывать модели и схемы для решения задач;
- осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;

- устанавливать причинно-следственные связи;
- осуществлять анализ, сравнение, сериацию и классификацию, самостоятельно выбирая основания и критерии для указанных логических операций;
- строить логическое рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;

Воспитательные результаты

Результаты первого уровня (приобретение социальных знаний, понимания социальной реальности и повседневной жизни):

- приобретение школьниками знаний о принятых в обществе нормах поведения и общения;
- об интеллектуальной деятельности, о способах и средствах выполнения заданий;
- о правилах конструктивной групповой работы;
- о способах самостоятельного поиска, нахождения, обработки информации;
- формирование мотивации к учению через внеурочную деятельность.

Результаты второго уровня (получение опыта переживания и позитивного отношения к базовым ценностям общества):

- самостоятельное или во взаимодействии с педагогом, значимым взрослым выполнение задания данного типа, для данного возраста;
- умение высказывать мнение, обобщать, классифицировать, обсуждать.

Результаты третьего уровня (получение опыта самостоятельного общественного действия):

- умение самостоятельно применять изученные способы, аргументировать свою позицию, оценивать ситуацию и полученный результат;
- участие в олимпиадах и интеллектуальных конкурсах.

Содержание ознакомительного этапа

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Приемы упрощения устного счета (сложение, вычитание): разбиение на пары. Метод дополнения до целого в клетчатых задачах. Использование связи между числовыми и геометрическими задачами для упрощения счета.

Приемы решения задач о разделении чисел на группы с равной суммой. Составление магических квадратов. Изменение суммы при изменении каждого слагаемого на некоторое число. Метод подсчета двумя способами на примере чисел с известными попарными суммами.

Прием разбиения на пары для подсчета сумм чисел, идущих через равные промежутки. Определение четности количества чисел в ряду. Формула суммы чисел от 1 до n . Разбиение на пары групп чисел с равной суммой. Метод подсчета двумя способами в арифметических задачах.

Использование подсчета двумя способами в доказательствах «от противного», при решении задач с арифметическими таблицами, геометрических задач. Введение переменной для дальнейшего двойного подсчета.

Среднее арифметическое, его свойства (изменение при увеличении всех чисел набора на некоторое число и в некоторое число раз; оценка среднего арифметического сверху и снизу наибольшим и наименьшим числами набора; неизменность среднего арифметического при добавлении числа, равного среднему арифметическому чисел набора).

2. Числа и их свойства

Способы решения числовых и буквенных ребусов. Организация перебора с учетом принципа узких мест. Приемы решения задач на восстановление знаков действий, расстановку скобок, нахождение чисел с указанными свойствами.

Понятие решения буквенного ребуса. Метод перебора для поиска всех решений ребуса. Ограничение полного перебора с учетом принципа узких мест, свойств четности. Доказательство отсутствия решения у ребуса с помощью метода перебора, числовых оценок.

Конструкции с обыкновенными и десятичными дробями. Представление чисел в виде обыкновенных дробей с числителем 1 и разными знаменателями. Применение арифметических свойств дробей, правила сокращения дробей. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень. Приемы решения задач на равномерное распределение частей между несколькими людьми.

Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий. Зависимость знака произведения от знаков множителей. Приемы решения задач на оценку и пример, связанные с отрицательными числами. Использование отрицательных чисел в задачах с числовыми оценками.

3. Закономерности

Поиск циклов в арифметических задачах. Анализ задач с повторяющимися числами, вычисление длины цикла. Определение и использование порядкового номера внутри цикла в задачах с «большими» числами.

Эффект «плюс-минус один». Использование схемы для его преодоления. Вывод формулы для определения количества натуральных чисел в промежутке с помощью интерпретации на числовой оси. Метода масштабирования для проверки формул. Использование эффекта «плюс-минус один» для устранения противоречий при решении задач. Конструкции с предварительным анализом.

Конструирование путем разбиения на аналогичные подзадачи в задачах на разрезание, составление числовых конструкций.

Последовательное конструирование (конструирование путем рассмотрения более простых задач и дальнейшего обобщения на исходную задачу). Бесконечные процессы. Понятие базовой конструкции, шага. Прием разбиения процесса на последовательность этапов, на каждом из которых изменяются свойства только одного элемента.

4. Время и движение

Приемы решения арифметических задач о промежутках времени. Учет разницы часовых поясов. Идея о задачах на движение по реке на примере задач про отстающие и спешащие часы. Конструкции в задачах про время.

Задачи на относительное движение (движение навстречу, в противоположных направлениях, вдогонку, с отставанием) с неполными данными. Разбор случаев в задачах на движение.

Использование нестандартных чертежей при решении задач на движение. Изображение скоростей движения в частях (единичных отрезках). Масштабирование скорости. Использование более крупных единиц времени для уравнивания расстояний.

Недельная и годовая цикличность. День недели как остаток от деления на 7. Способы построения конструкций и доказательства невозможности построения конструкций в задачах про календарь.

Движение по кругу. Изображение скоростей движения в условных единицах (дугах). Движение стрелок часов, исследование количества их пересечений. Понятие градусной меры дуги на примере углов между часовой, минутной, секундной стрелками.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Повороты клетчатой фигуры на прямой угол, связь с симметрией. Понятие о зеркальных (но несимметричных) фигурах. Использование симметрии и поворотов фигур при решении задач на разрезание. Метод «пропеллера» для построения примеров.

Задачи на разрезание пространственных фигур. Вычисление объемов фигур, составленных из кубиков. Изменение объема фигуры, составленной из кубиков, при увеличении каждого измерения в 2 раза. Составление фигур из объемных частей.

Понятие развертки. Нахождение различных разверток куба. Способы изображения «склеивающихся» граней при изображении развертки куба.

Изображение фигур, состоящих из кубиков. Три вида объемной фигуры. Восстановление объемной фигуры по трем ее видам.

Изображение многогранников по заданному количеству вершин, ребер и граней (тетраэдр, пирамида, октаэдр, усеченная пирамида). Развертки многогранников. Оклеивание объемных фигур. Пути на поверхности объемных фигур.

2. Площади

Разрезание фигур на равные части по линиям сетки и составление фигур из частей. Приемы поиска разных способов разрезания. Метод перебора, использование симметрии при поиске как можно большего количества различных разрезов одной и той же фигуры на равные части. Фигуры тетрамино, их нахождение с помощью метода перебора. Использование множества делителей числа для вычисления возможного количества частей, на которые можно разрезать фигуру.

Разрезания по линиям сетки и диагоналям клеток. Свойство аддитивности площади. Метод разбиения на элементарные части (прямоугольники, прямоугольные треугольники) и метод дополнения для вычисления площадей фигур, границы которых идут не по линиям сетки.

Использование площадей фигур для определения форм частей в случае разрезания клетчатых фигур не по линиям сетки (диагоналям клеток). Пентамино. Получение фигур пентамино из тетрамино с помощью геометрического метода перебора. Использование симметрии при решении задач на разрезание.

Введение дополнительной сетки (укрупнение или уменьшение клеток, наклонная сетка). Первичные представления о движениях плоскости (параллельный перенос, поворот). Перпендикулярность на клетчатой бумаге. Приемы решения задач на перекраивание фигур («разрежь и составь»). Равносоставленные фигуры.

Разрезание не клетчатых фигур. Введение вспомогательной сетки. Разрезание фигур на подобные. Использование вспомогательной раскраски

при решении задач на разрезание. Задачи на разрезание с оценкой и примером.

3. Геометрические неравенства

Конструкции с отрезками и ломаными. Вычисление периметров фигур. Связь между длинами отрезков на прямой. Приближенное вычисление длин ломаных и кривых с помощью нити. Подсчет количества кратчайших путей в графе. Задача о нахождении диагонали кирпича. Кратчайшие пути по граням куба, параллелепипеда.

Варианты расположения точек на прямой. Координата середины отрезка числовой прямой. Расстояние между серединами отрезков.

Неравенство треугольника. Доказательство неравенства треугольника с использованием построений. Оценка суммы длин диагоналей четырехугольника через его периметр.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Метод уравнивания при решении задач с опорой на вспомогательные схемы. Метод «анализ с конца». Прием «учти лишнее». Метод подсчета двумя способами. Связь с теорией множеств.

Выбор удобной переменной в текстовых задачах. Сравнение метода введения переменных с методом доказательства единственности решения задачи с помощью числовых оценок.

Десятичная запись (представление натурального числа в виде $a + 10b + 100c + \dots$). Признаки делимости, связанные с десятичной записью числа. Использование десятичной записи при решении буквенных ребусов и для доказательств «от противного». Сведение задачи к простейшим уравнениям в цифрах с дальнейшим перебором вариантов, использованием свойств делимости.

2. Функциональные зависимости

Использование формул при решении нестандартных текстовых задач. Формулы площади прямоугольника, объема и площади поверхности куба, прямоугольного параллелепипеда.

Доказательство формул перевода единиц измерения площади, объема.
Нестандартные единицы измерения.

Понятие взаимно однозначного соответствия между множествами.
Разбиение объектов на пары как пример взаимно однозначного соответствия.
Использование взаимно однозначного соответствия для сравнения мощностей множеств. Примеры соответствий, не являющихся взаимно однозначными.
Взаимно однозначное соответствие в простых комбинаторных задачах.

Прямая и обратная пропорциональность. Использование пропорций при решении нестандартных текстовых задач. но изменяемых чисел.

3. Неравенства и оценки

Сравнение многозначных чисел. Нахождение наибольшего или наименьшего многозначного числа с определенными свойствами.
Использование правил сравнения чисел для доказательства минимальности и максимальнойности.

Метод перебора в арифметических задачах. Перебор по количеству объектов одного из двух типов. Задачи про «ноги и головы». Оценки, основанные на изменении количества объектов одного типа на единицу.

Четность как инструмент упрощения перебора и доказательства невозможности.

Оценки величины «сверху» и «снизу». Ограничение перебора с помощью оценок. Двусторонние оценки как метод доказательства единственности ответа. Простейшие действия с неравенствами. Оценки, связанные с делимостью. Решение двойных неравенств с натуральными числами.

Транзитивность неравенств. Использование промежуточного числа (посредника) для доказательства числовых неравенств. Использование нескольких посредников. Уменьшение чисел на интервале $(0; 1)$ при возведении в степень.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Вывод признака делимости на 2 с помощью числового луча и зацикливания последней цифры. Изменение последней цифры числа при сложении, вычитании, умножении. Доказательство четности и нечетности суммы и разности двух чисел.

Четность или нечетность суммы нескольких чисел. Доказательство с помощью разбиения на пары. Использование соображений четности при решении задач на доказательство для упрощения перебора вариантов.

Делимость и ее свойства. Доказательство признаков делимости на 2, 4, 8, 5, 25, 10, 3, 9, их обобщение. Отсутствие обобщения признака делимости на 9 на признак делимости на 27.

Разложение натурального числа на простые множители. НОД и НОК. Простые числа. Делимость как инвариант. Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.).

Задачи на оценку и пример, связанные с признаками делимости: нахождение минимального числа с указанными свойствами делимости, числа с наименьшей суммой цифр.

Каноническое разложение натурального числа. Степень вхождения простого делителя. Четность степеней вхождения простых множителей в каноническое разложение точного квадрата.

2. Остатки

Признак делимости на 10. Последняя цифра как остаток от деления на 10. Правила изменения последней цифры при арифметических операциях (сложение, вычитание, умножение).

Повторяемость на числовом луче чисел, делящихся на n . Повторяемость чисел, дающих определенный остаток при делении на n .

Способ определения остатка числа, связанный с соответствующим признаком делимости. Делимость на n разности числа и его остатка от деления на n . Сумма цифр. Делимость разности числа и его суммы цифр на 3 и 9. Раскладывание числа на разное количество частей с данным остатком.

Остатки от деления целых чисел на натуральные. Общий вид числа с определенным остатком при делении на число. Арифметические свойства остатков. Задачи на остатки с доказательством по принципу Дирихле. Зацикливание остатков степеней.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Понятие об истинном и ложном высказывании. Составление высказываний и вопросов с определенными свойствами. Перебор двух вариантов в логических задачах.

Рыцари и лжецы. Отрицания элементарных высказываний. Перебор вариантов по роли (рыцарь/лжец). Представление перебора в виде таблицы, дерева вариантов. Высказывания о логическом следовании.

Логические задачи с неединственным ответом. Перебор, использующий высказывания о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний о существовании и всеобщности. Отрицание высказываний с «больше», «меньше», «больше или равно», «меньше или равно».

Метод «от противного». Логические таблицы. Отрицание высказываний с «и», «или», более сложных высказываний. Логические задачи на оценку и пример.

Доказательства, использующие чередование объектов. Расположение объектов по кругу.

2. Принципы решения задач

Представление условия задачи в виде нестандартного чертежа. Геометрические интерпретации логических и арифметических задач.

Малые случаи. Разделение задачи на эквивалентные подзадачи. Составление блоков из элементов разбиения. Задачи с повторяющимися объектами. Метод проверки ответа (закономерности) на малых случаях.

Анализ задачи с конца (обратный ход) в арифметических и логических задачах. Сравнение с методом введения переменной. Табличное

представление анализа с конца. Рассмотрение последнего шага процесса, его использование для доказательств в логических задачах.

Задачи с вопросом «сколько нужно взять?». Использование отрицаний элементарных высказываний при решении задач.

Формальное введение принципа Дирихле. Связь с доказательством «от противного». Обобщения принципа Дирихле. Принцип Дирихле в геометрических задачах. Остатки и принцип Дирихле.

3. Алгоритмы и конструкции

Переливания (задачи на отмеривание определенного количества жидкости с помощью двух или более емкостей и источника воды). Табличная форма записи шагов алгоритма. Укрупнение шагов алгоритма при наличии повторяющихся групп действий (идея алгоритмических циклов).

Переправы. Организация перебора в задачах на переправы, удобная форма записи решения. Идея промежуточных обратных действий для работы алгоритма (перевоз объекта обратно).

Составление алгоритмов угадывания с помощью вопросов, на которые можно ответить только «да» или «нет». Доказательство несостоятельности алгоритма, позволяющего при одинаковых начальных данных получить различные ответы.

Взвешивания. Составление алгоритмов определения фальшивых монет с помощью взвешиваний. Прямая и косвенная информация. Понятие о количестве информации. Доказательство невозможности построения алгоритма при недостаточном количестве взвешиваний. Задачи на испытания с другими сюжетами.

4. Игры и стратегии

Понятие математической игры для двух игроков на примере игр с шахматными фигурами на досках. Игры-шутки, в которых победитель зависит только от количества раундов. Формирование представления о выигрышных позициях.

Понятие выигрышной стратегии. Математические игры с полной информацией. Использование дерева перебора для доказательства верного выбора стратегии.

Симметричная стратегия в играх. Доказательство симметричной стратегии. Симметричная стратегия с «центром». Примеры неверного использования симметричной стратегии.

Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии.

Игры на опережение. Игры, в которых один игрок может гарантировать себе «ничью».

VI. КОМБИНАТОРИКА И ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Комбинаторика

Использование схем (графов) для удобства подсчета количества связей (дорог, рукопожатий). Доказательства невозможности построения графа с определенным количеством связей. Подсчет общего количества игр в однокруговом турнире. Связь между прямым подсчетом числа связей по схеме и двойным подсчетом через суммарное количество выходящих «связей».

Дерево вариантов для решения комбинаторных задач. Переход от дерева вариантов к правилу произведения (правилу «И»). Подсчет количества чисел с определенными свойствами.

Правило суммы (правило «ИЛИ») и правило произведения (правило «И»), определение ситуаций для использования каждого правила. Задачи, требующие использования комбинации этих правил.

Перестановки без повторений и с повторениями на примере анаграмм слова. Вывод формулы для числа перестановок из правила произведения. Факториал и его свойства. Перестановки с повторениями. Вывод формулы.

2. Теория множеств

Диаграмма Эйлера — Венна для двух, трех и более множеств. Пересечение и объединение множеств, различные методы подсчета количества элементов в пересечении и объединении на готовых диаграммах.

Введение вспомогательной диаграммы для решения задачи. Работа с множествами с неизвестным количеством элементов. Логические задачи на множества, связанные с долями и дробями.

Метод дополнения в задачах. Использование кругов Эйлера и метода дополнения в комбинаторных задачах, в том числе для вычисления количества чисел в диапазоне, делящихся или не делящихся на какие-то числа.

Метод введения переменной при решении задач про множества.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Раскраски досок. Конструирование примера раскраски доски с указанными свойствами. Задачи-соревнования на раскраску досок в наибольшее и наименьшее количество цветов. «Правильная» раскраска. Раскраска географической карты как пример «правильной» раскраски.

Чередование объектов как частный случай «шахматной» раскраски. Чередование объектов в ряду, по кругу. Относительное количество чередующихся объектов. Четность суммы чисел в промежутке. Связь чередования и разбиения на пары. Разрезания шахматной доски. Идея использования заданной шахматной раскраски в доказательствах.

Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты. Шахматная раскраска ребер и граней куба. Принцип Дирихле в задачах с раскраской. Использование раскраски для нахождения и доказательства единственности примера.

Виды раскрасок клетчатых досок в два и более цвета. Раскраска полосами, диагональная раскраска в несколько цветов, «крупная» шахматная раскраска. Доказательство невозможности разрезания на основе раскраски.

2. Теория графов

Изображение графов. Граф как способ удобного представления связей между объектами. Изоморфизм графов. Различные способы изображения связей. Неориентированные и ориентированные связи.

Исследование возможности нарисовать фигуру одним росчерком. Теорема Эйлера как формальный способ проверить, можно ли нарисовать фигуру одним росчерком. Нечетность степеней вершин как способ выявления концов пути.

Полный граф. Количество ребер в полном графе. Графы шахматных фигур и количество ребер в них. Двудольный граф как модель связей между объектами двух типов. Представление турнира в виде графа.

Формальное определение графа. Вершины, ребра, степени вершин. Лемма о рукопожатиях как способ подсчета количества ребер в графе через сумму степеней вершин. Свойство четности количества вершин нечетной степени в графе. Лемма о хороводах.

3. Комбинаторная геометрия

Взаимное расположение точек и отрезков на плоскости. Точки и отрезки, лежащие на одной прямой. Идея об увеличении количества частей при разрезании невыпуклых фигур. Разрезание фигур на части с определенным числом сторон.

Разрезание на части, не образующие прямоугольники. Задачи на объединение фигур.

Покрывание плоскости одинаковыми фигурами (паркет). Понятие о многоугольнике. Паркет в форме правильных многоугольников (треугольники, квадраты, шестиугольники). Замощение клетчатыми фигурами. Замощение многоугольниками неправильной формы. Замощение невыпуклыми многоугольниками. Задачи о наиболее плотной укладке.

Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий. Задачи о пересечении фигур.

Практический этап. 7–9 классы

Содержание этапа

I. АРИФМЕТИКА

1. Суммы

Телескопическое суммирование. Суммы с переменными пределами. Использование формул сокращенного умножения (разность квадратов, кубов), разложения многочленов на множители при вычислении сумм.

Последовательности. Числа Фибоначчи как пример рекуррентного соотношения. Свойства чисел Фибоначчи, связанные с суммированием. Примеры задач, при решении которых возникает последовательность Фибоначчи.

Применение арифметической, геометрической прогрессий и их свойств при решении задач. Понятие о рекуррентных соотношениях.

2. Числа и их свойства

Определение рационального числа. Доказательство рациональности периодических дробей. Конструкции с рациональными числами.

Определение иррационального числа. Доказательство иррациональности чисел на примере числа $\sqrt{2}$. Сопряженные иррациональные числа. Умножение выражения на сопряженное. Рациональность и иррациональность суммы, разности, произведения и частного иррациональных чисел. Иррациональность бесконечных непериодических десятичных дробей.

Приложения иррациональных чисел. Иррациональность в алгебраических задачах. Связь между диагональю и стороной квадрата. Невозможность построения правильного треугольника с вершинами в узлах сетки. Применение идей о рациональности и иррациональности в геометрических задачах.

3. Закономерности

Обобщение числовой задачи на задачу с переменным количеством элементов. Формулы числовых закономерностей. Введение формул закономерностей при подсчете количества объектов в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах.

Метод математической индукции. Формальное введение метода. База, шаг индукции. Доказательство алгебраических равенств (формул

закономерностей) с помощью метода математической индукции. Задачи с шагом, отличным от 1.

Более сложные схемы математической индукции. Индукция со ссылкой на несколько предыдущих элементов. Возвратная схема математической индукции, примеры неправильного применения метода математической индукции. Использование метода математической индукции при решении геометрических, комбинаторных, комбинаторно-геометрических, теоретико-числовых задач.

4. Время и движение

Относительное движение. Переход в систему координат, связанную с одним из объектов, движущимся по прямой или по окружности. Движение мимо протяженных объектов. Движение по реке. Задачи о двигающемся эскалаторе.

Задачи на движение с несколькими переменными. Применение неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел, неравенства Штурма в задачах на движение.

Сведение текстовых задач (на движение, совместную работу и т. д.) к линейным и нелинейным системам с несколькими переменными.

II. ГЕОМЕТРИЯ

1. Геометрическое мышление

Задачи на построение. Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ. Использование симметрии в задачах на построение. Построение кратчайших путей. Биссектрисы, серединные перпендикуляры как ГМТ.

Решение задач, использующих дополнительные построения: удвоение медианы, откладывание равного отрезка на продолжении стороны («спрямление»), построение середины отрезка, проведение высот, вспомогательной окружности.

Движения плоскости и их использование при решении геометрических задач. Центральная, осевая и скользящая симметрия. Поворот. Параллельный перенос. Гомотетия, поворотная гомотетия.

2. Площади

Формула площади треугольника. Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки. Вывод формулы площади произвольного треугольника с помощью метода дополнения. Вычисление площадей фигур с помощью разрезов на элементарные части (прямоугольники и треугольники).

Метод трансформации площадей, основанный на формуле площади треугольника.

Формула Пика для вычисления площадей многоугольников с вершинами в узлах сетки. Ее доказательство методом математической индукции и применение в задачах.

3. Геометрические неравенства

Неравенство треугольника и дополнительные построения. Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой, касающегося этой прямой. Более сложные задачи о кратчайших путях, использующие симметрию и неравенство треугольника.

Неравенство ломаной как обобщение неравенства треугольника. Теорема о монотонности периметра: если внутри одного треугольника находится другой, то периметр внутреннего треугольника меньше периметра внешнего.

Случаи в геометрических задачах. Доказательство правильности дополнительного построения.

4. Аналитические методы в геометрии

Теорема Пифагора. Доказательства теоремы, основанные на свойствах площадей фигур. Применение теоремы Пифагора при решении задач на разрезание.

Декартовы координаты на плоскости. Метод координат для решения геометрических задач. Векторы, их свойства. Использование векторов в геометрических доказательствах.

Теоремы синусов и косинусов. Их применение в геометрических доказательствах.

III. АЛГЕБРА

1. От чисел к буквам

Алгебраические преобразования. Понятие об одночлене, многочлене. Разложение многочленов на множители. Формулы сокращенного умножения и их применение при решении задач.

Многочлены с целыми коэффициентами, их свойства. Свойства коэффициентов многочлена. Теорема Виета для квадратного трехчлена.

Квадратный трехчлен, его свойства.

Доказательство теоремы Безу для многочленов, ее использование при решении задач. Понятие асимптотики на примере зависимости поведения многочлена от знака его старшего коэффициента. Теорема Виета.

2. Функциональные зависимости

Линейная функция. Свободный член и угловой коэффициент, их геометрический смысл. График линейной функции. Точки с целочисленными координатами на прямой. Использование свойств линейной функции при решении нестандартных задач.

Квадратичная функция. Геометрический смысл коэффициентов. График квадратичной функции.

Использование свойств непрерывности графиков функций для решения задач.

Распознавание функций по их свойствам и значениям. Интерполяционные многочлены.

3. Неравенства и оценки

Доказательство неравенств. Неотрицательность квадрата числа. Выделение полных квадратов. Неравенство о средних арифметическом и геометрическом для двух чисел. Неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях.

Сведение неравенств к уже известным. Неравенства о средних для двух чисел.

Транснеравенство, неравенство Чебышева. Симметрические и циклические неравенства.

Неравенство Коши — Буняковского — Шварца. Способы его доказательства. Лемма Титу.

Общий случай неравенства о средних. Метод Штурма доказательства неравенств. Доказательство классических неравенств с помощью метода Штурма.

IV. ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

1. Делимость

Алгоритм Евклида. Свойства НОД и НОК. Теорема о линейном представлении НОД, ее использование для нахождения частного решения линейных диофантовых уравнений.

Нелинейные уравнения в целых, неотрицательных, натуральных числах. Использование степеней вхождения простых чисел. Метод бесконечного спуска. Использование сравнений по модулю. Применение разложения на множители, выделения полного квадрата, других ФСУ.

Мультипликативные функции. Функция Эйлера, простейшие примеры вычисления функции. Связь с МТФ. Теорема Эйлера.

2. Остатки

Перебор по остаткам. Остатки квадратов при делении на 3, 4, 5, 7, 8, 9.

Сравнения по модулю. Свойства сравнений. Вопрос о делении сравнений. Сравнения как удобный метод записи перебора по остаткам.

Решение сравнений через сведение к линейным диофантовым уравнениям. Решение линейных диофантовых уравнений.

Малая теорема Ферма. Доказательство через остатки произведений при делении на p . Доказательство по индукции. Теорема Вильсона. Применение МТФ и теоремы Вильсона в задачах теории чисел.

Теория чисел на окружности. Первообразный корень. Порядок (показатель) числа по модулю, его свойства. Классы вычетов. Доказательство МТФ через показатели. Доказательство МТФ через системы вычетов.

V. ЛОГИКА

1. Математическая логика

Приемы решения логических задач на оценку и пример. Доказательства, использующие раскраску объектов и разбиение на группы. Отрицание логического следования.

Использование принципа крайнего при решении логических задач. Логические формулы, их использование для построения отрицаний. Законы де Моргана. Таблицы истинности.

Графы в логических задачах. Примеры комбинированных логических задач, связанных с другими областями математики.

2. Принципы решения задач

Принцип узких мест как инструмент конструирования примеров, доказательства утверждений (в том числе в комбинации с другими методами, такими как метод «от противного»). Рассмотрение наибольшего или наименьшего числа в ряду, упорядочивание. Геометрический принцип крайнего.

Процессы. Инвариант как метод доказательства утверждений, выяснения результата процесса. Инварианты, связанные с теорией чисел (делимость, остатки). Инварианты в геометрических задачах. Раскраска как инвариант.

Полуинвариант, сравнение с инвариантом. Нахождение полуинварианта как метод доказательства конечности процесса. Сумма и произведение чисел

как полуинвариант. Полуинварианты в комбинаторной геометрии, теории графов, геометрических задачах.

3. Алгоритмы и конструкции

Понятие о «жадном» алгоритме. «Жадный» алгоритм как метод построения примера, доказательства минимальности или максимальности. Использование «жадного» алгоритма при постепенном конструировании. Отклонение от «жадности».

Составление алгоритмов, работающих вне зависимости от промежуточных результатов работы алгоритма. Связь с системами счисления. Примеры таких алгоритмов в задачах на взвешивания, угадывание, в задачах на клетчатых досках.

Обобщение методов доказательства невозможности построения алгоритма при определенных условиях. Оценка сложности алгоритмов.

4. Игры и стратегии

Стратегия предварительного разбиения ходов на пары в математических играх для двух игроков, связь с темой «Соответствия». Разбиение на пары во время игры. Стратегии создания «заповедников».

Неконструктивное доказательство существования стратегии.

Игры на графах. Использование двоичной системы счисления в теории игр. Игра Ним.

VI. КОМБИНАТОРИКА

1. Комбинаторика

Размещения с повторениями и их использование при решении задач. Размещения без повторений. Вывод формулы и ее запись в виде отношения факториалов.

Число сочетаний и его связь с числом размещений. Вывод формулы. Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенств для числа сочетаний.

Свойства чисел сочетаний. Вывод формулы шаров и перегородок. Взаимно однозначные соответствия в комбинаторике. Идея кодирования задач. Комбинаторные задачи с множествами.

Бином Ньютона, треугольник Паскаля, связь между ними. Их применение при решении задач.

2. Теория множеств

Формула включений-исключений для трех множеств.

Обобщение формулы включений-исключений на несколько множеств. Комбинаторное доказательство. Применение формулы включений-исключений при решении задач комбинаторной геометрии.

Индукционное доказательство формулы включений-исключений. Использование изоморфизма множеств для упрощения подсчета числа вариантов.

VII. КОМБИНАТОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Раскраски и разбиения

Разбиение на группы объектов двух типов, расположенных по кругу. Разбиение досок на части для доказательства оценок. Подсчет общего количества разбиений.

Определение правильных вершинной и реберной раскрасок. Двудольный граф как пример графа, раскрашиваемого в два цвета.

Хроматическое число графа. Планарные (плоские) графы, их связь с картами. Проблема четырех красок. Формула Эйлера для связного плоского графа.

2. Теория графов

Связность графа, компоненты связности. Циклы в графах. Дерево, его определения и свойства. Зависимость минимального количества ребер в графе от числа компонент связности.

Двудольные графы. Критерий двудольности.

Выделение остовного дерева. Подвешивание графа. Дополнительный граф. Использование графов в теории чисел, комбинаторной геометрии.

Ориентированные графы, их свойства и область применения.

Критерий существования эйлерова пути, эйлерова цикла в графе. Разбиение произвольного графа в объединение простых путей и непересекающихся циклов. Гамильтонов путь, гамильтонов цикл в графе. Существование гамильтонова пути в полном ориентированном графе. Примеры графов без гамильтоновых циклов.

3. Комбинаторная геометрия

Раскраски плоскости с определенными свойствами. Задачи о нахождении одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии. Раскраски паркетов. Раскраска объемных фигур.

Определение выпуклого множества. Различные определения выпуклых многоугольников, их эквивалентность. Понятие о триангуляции. Лемма о диагонали. Триангуляция произвольного многоугольника. Доказательство формул суммы градусных мер внутренних и внешних углов многоугольника. Связь триангуляций с деревьями. Лемма о наличии в триангуляции двух треугольников с двумя сторонами, совпадающими со сторонами многоугольника.

Опорная прямая многоугольника. Выпуклая оболочка системы точек. Построение выпуклой оболочки. Использование при решении задач и доказательстве утверждений.

Тематическое планирование

5 класс

2 ч в неделю, всего 68 ч

№	Название раздела	Кол-во часов	Основное содержание
	Арифметика	8	Нестандартные задачи на движение, использование вспомогательного чертежа при решении задач на движение. Конструирование в задачах с

			дробями, числовые ребусы с дробями, использование свойств и признаков делимости при конструировании.
	Геометрия	8	Перекраивание фигур для удобства вычисления площади на клетчатой бумаге. Различные развертки куба, три вида объемной фигуры и восстановление фигуры по ее видам.
	Алгебра	8	Сведение задач к неравенству, задачи на оценку и пример. Введение переменной в текстовых задачах как метод нахождения всех решений, сравнение с методом перебора.
	Теория чисел	8	Метод разбиения чисел на пары, вычисление количества и суммы чисел в указанном диапазоне, эффект «плюс-минус один». Определение остатка числа при делении с помощью признака делимости, арифметика остатков. Свойства и признаки делимости, задачи на оценку и пример. Разложение на простые множители, задачи на доказательство, использующие разложение на простые множители.
	Логика	16	Конструирование и доказательство как способы ответа на вопрос «Можно ли?». Анализ «с конца» как альтернатива введению переменной

			<p>при решении текстовых задач, использование метода «анализ с конца» в задачах на доказательство.</p> <p>Полный перебор в логических задачах, выбор удобного инструмента перебора, высказывания о всеобщности и существовании в логических задачах.</p> <p>Составление алгоритмов угадывания, формирование представлений об оптимальном алгоритме.</p> <p>Дополнение подмножества, использование метода косвенного подсчета (дополнения) при решении комбинаторных задач.</p> <p>Предварительный анализ в задачах на разрезание, метод «малых случаев», метод «подсчета двумя способами». Метод взаимно-однозначного соответствия (разбиение на пары и группы)</p>
	Комбинаторика	8	<p>Оценка и пример в задачах о случайном выборе предметов. Дерево вариантов, комбинаторные правила суммы и произведения. Симметричная стратегия в играх, доказательство стратегии.</p>
	Комбинаторная геометрия	12	<p>Принцип «узких мест» в геометрических задачах, соображения симметрии, метод перебора в задачах на разрезание и составление фигур.</p>

			<p>Конструирование в геометрических задачах, замощение плоскости равными фигурами, представления о невыпуклых фигурах. Критерий расположения трех точек на прямой, конструирование в геометрических задачах. Решение задач на тему «разрежь и составь». Метод анализа «с конца» при решении задач на разрезание. Равносоставленные фигуры.</p> <p>Введение вспомогательной сетки при решении задач на разрезание.</p> <p>Шахматная раскраска досок, ее использование для оценок и доказательств. Обобщение шахматной раскраски на другие объекты. Граф как модель представления информации, графы шахматных фигур, двудольный граф.</p>
--	--	--	---

6 класс

2 ч в неделю, всего 68 ч

№	Название раздела	Кол-во часов	Основное содержание
	Арифметика	8	<p>Использование чертежей при решении задач на движение по кругу.</p> <p>Изображение скоростей движения в условных единицах (дугах). Движение стрелок часов, исследование количества их пересечений. Понятие</p>

			<p>градусной меры дуги на примере углов между часовой, минутной, секундной стрелками. Решение задач на оценку и пример, связанные с признаками делимости: нахождение минимального числа с указанными свойствами делимости, числа с наименьшей суммой цифр.</p> <p>Использование метода двойного подсчета в арифметических задачах.</p> <p>Использование подсчета двумя способами в доказательствах «от противного». Задачи с арифметическими таблицами, геометрические задачи, использование введения переменной для дальнейшего двойного подсчета.</p>
	Геометрия	10	<p>Изображение многогранников по заданному количеству вершин, ребер и граней (тетраэдр, пирамида, октаэдр, усеченная пирамида).</p> <p>Развертки многогранников.</p> <p>Оклеивание объемных фигур.</p> <p>Пути на поверхности объемных фигур.</p> <p>Доказательство неравенства треугольника с использованием построений. Оценка суммы длин диагоналей четырехугольника через его периметр. Арифметические задачи, связанные с неравенством</p>

			треугольника. Невыпуклые фигуры как средство преодоления мнимых противоречий. Задачи о пересечении фигур. Невыпуклые многоугольники.
	Алгебра	10	Использование представления в виде суммы разрядных слагаемых с переменными ($a + 10b + 100c + \dots$) при решении задач. Сведение задачи к простейшим уравнениям в цифрах с дальнейшим перебором вариантов, использованием свойств делимости. Применение десятичной записи при решении буквенных ребусов. Использование пропорций при решении нестандартных текстовых задач. Свойство суммы и среднего арифметического пропорционально изменяемых чисел. Транзитивность неравенств. Использование промежуточного числа (посредника) для доказательства числовых неравенств. Использование нескольких посредников. Использование отрицательных чисел в конструкциях как метод устранения мнимых противоречий. Зависимость знака произведения от количества отрицательных знаков у множителей. Задачи на

			<p>оценку и пример, связанные с отрицательными числами.</p> <p>Использование отрицательных чисел в задачах с числовыми оценками.</p>
	Теория чисел	10	<p>Использование среднего арифметического и его свойств при решении задач. Другие признаки делимости, связанные с десятичной записью числа (на 7, 11, 13 и др.), их доказательство. Теорема о простом делителе. Следствие о четности степеней вхождения простых множителей в каноническое разложение точного квадрата. Остатки от деления целых чисел на натуральные. Общий вид числа с определенным остатком при делении на число. Арифметические свойства остатков. Задачи на остатки с доказательством по принципу Дирихле. Зацикливание остатков степеней.</p>
	Логика	12	<p>Использование метода «от противного» при решении задач. Отрицания высказываний с логическими связками, использование отрицаний при решении логических задач (про рыцарей и лжецов), метода перебора. Решение задач на конструирование путем рассмотрения</p>

			<p>более простых задач и дальнейшего обобщения на исходную задачу.</p> <p>Бесконечные процессы. Метод «добавь по одному». Идея разбиения процесса на последовательность этапов, на каждом из которых изменяются свойства только одного элемента. Развитие представления о стратегиях в математических играх на примере игр на опережение. Игры, в которых один игрок может гарантировать себе «ничью».</p> <p>Формальное введение принципа Дирихле. Связь с доказательством «от противного». Задачи на оценку и пример, использующие в качестве оценки рассуждения по принципу Дирихле. Составление алгоритмов определения фальшивых монет с помощью взвешиваний. Прямая и косвенная информация. Понятие о количестве информации.</p> <p>Доказательство невозможности построения алгоритма при недостаточном количестве взвешиваний. Задачи на испытания с другими сюжетами.</p>
	Комбинаторика	10	Задачи с множествами, требующие оценки наибольшего или наименьшего

			<p>значения некоторой величины.</p> <p>Введение переменной в задачах про множества. Перестановки без повторений и с повторениями на примере анаграмм слова. Вывод формулы для числа перестановок из правила произведения. Факториал и его свойства. Перестановки с повторениями. Вывод формулы.</p> <p>Выигрышные позиции как метод конструирования стратегии.</p>
	Комбинаторная геометрия	8	<p>Использование шахматной раскраски досок для оценок и доказательств.</p> <p>Использование чередования в доказательствах и подсчетах в задачах на досках. Использование принципа Дирихле в геометрических задачах.</p> <p>Интерпретация задач в терминах теории графов. Подсчет количества ребер в графе. Лемма о рукопожатиях. Свойство четности количества вершин нечетной степени. Лемма о хороводах.</p>

7 класс

2 ч в неделю, всего 68 ч

№	Название раздела	Кол-во часов	Основное содержание
	Арифметика	12	<p>Обобщение числовой задачи на задачу с переменным количеством элементов. Формулы числовых закономерностей. Введение формул</p>

			<p>закономерностей при подсчете количества объектов в арифметических, геометрических, логических и комбинаторных задачах. Суммы с переменными пределами. Идея метода телескопического суммирования при вычислении сумм. Определение рационального числа. Доказательство рациональности периодических дробей. Конструкции с рациональными числами. Переход в систему координат, связанную с одним из объектов, движущимся по прямой или по окружности. Движение мимо протяженных объектов. Движение по реке. Задачи о двигающемся эскалаторе.</p>
	Геометрия	10	<p>Вывод формулы площади произвольного треугольника с вершинами в узлах сетки. Вывод формулы площади произвольного треугольника с помощью метода дополнения. Вычисление площадей фигур с помощью разрезов на элементарные части (прямоугольники и треугольники). Использование дополнительных построений при доказательстве геометрических неравенств. Задача о нахождении кратчайшего пути между двумя</p>

			<p>точками, находящимися по одну сторону от заданной прямой, касающегося этой прямой. Более сложные задачи о кратчайших путях, использующие симметрию и неравенство треугольника. Решение нестандартных задач на построение, нахождение ГМТ. Использование симметрии в задачах на построение. Построение кратчайших путей. Биссектрисы, серединные перпендикуляры как ГМТ.</p>
	Алгебра	10	<p>Теорема о линейном представлении НОД, ее использование для нахождения частного решения линейных диофантовых уравнений. Решение сравнений через сведение к линейным диофантовым уравнениям. Использование формул сокращенного умножения (разность квадратов, кубов) при вычислении сумм. Использование методов разложения многочленов на множители. Доказательство неравенств. Неотрицательность квадрата числа. Выделение полных квадратов. Неравенство о средних арифметическом и геометрическом для двух чисел. Неравенство о сумме квадратов трех чисел и их попарных произведениях. Линейная функция.</p>

			<p>Свободный член и угловой коэффициент, их геометрический смысл. График линейной функции.</p> <p>Точки с целочисленными координатами на прямой.</p> <p>Использование свойств линейной функции при решении нестандартных задач (например, исследование соотношения между шкалами Цельсия и Фаренгейта).</p>
	Теория чисел	8	<p>Алгоритм Евклида, свойства НОД и НОК. Их использование при решении задач. Перебор по остаткам. Остатки квадратов при делении на 3, 4, 5, 7, 8, 9. Сравнения по модулю. Свойства сравнений. Вопрос о делении сравнений. Сравнения как удобный метод записи перебора по остаткам</p>
	Логика	12	<p>Решение логических задачи на оценку и пример. Доказательства, использующие раскраску объектов и разбиение на группы (геометрический принцип Дирихле). Отрицание логического следования. Принцип крайнего (узких мест) как инструмент конструирования примеров, доказательства утверждений (в том числе в комбинации с другими методами, такими как метод «от противного»). Элементы</p>

			<p>геометрического принцип крайнего.</p> <p>Формула включений-исключений для трех множеств. Рассмотрение наибольшего или наименьшего числа в ряду. Упорядочивание ряда чисел.</p> <p>«Жадный» алгоритм как метод построения примера, доказательства минимальности или максимальности.</p> <p>«Жадный» алгоритм как метод при постепенном конструировании.</p> <p>Отклонение от «жадности». Развитие представлений о стратегиях в математических играх.</p> <p>Стратегия предварительного разбиения ходов на пары, связь с темой «Соответствия». Разбиение на пары во время игры. Стратегии создания «заповедников».</p>
	Комбинаторика	6	<p>Размещения с повторениями и их использование при решении задач. Размещения без повторений.</p> <p>Вывод формулы и ее запись в виде отношения факториалов. Число сочетаний и его связь с числом размещений. Вывод формулы.</p> <p>Комбинаторное и алгебраическое доказательства равенств для числа сочетаний.</p>
	Комбинаторная геометрия	10	<p>Использование различных раскрасок в два и более цвета при решении задач</p>

			<p>на клетчатых досках и других задач.</p> <p>Раскраска полосами, диагональная раскраска в несколько цветов, «крупная» шахматная раскраска.</p> <p>Связность графа, компоненты связности. Циклы в графах. Дерево, его определения и свойства.</p> <p>Зависимость минимального количества ребер от числа компонент связности.</p> <p>Раскраски плоскости с определенными свойствами. Задачи о нахождении одноцветных и разноцветных точек на определенном расстоянии. Раскраски паркетов. Раскраска объемных фигур.</p> <p>Двудольные графы. Критерий двудольности.</p>
--	--	--	--

8 класс

2 ч в неделю, всего 68 ч

№	Название раздела	Кол-во часов	Основное содержание
	Арифметика	10	<p>Задачи, в которых возникает последовательность Фибоначчи.</p> <p>Формальное введение метода математической индукции. База, шаг индукции. Задачи на доказательство алгебраических равенств (формул закономерностей).</p> <p>Задачи на изучение иррациональных чисел, свойств арифметического квадратного корня. Примеры</p>

			применения метода математической индукции в неалгебраических задачах.
	Геометрия	10	<p>Задачи на дополнительные построения в геометрических задачах (симметрия, «спрямление»). Задачи на неравенство ломаной (обобщение неравенства треугольника), теорема о монотонности периметра. Задачи на исследование геометрических свойств квадратного трехчлена. Определение выпуклого множества.</p> <p>Эквивалентность различных определений выпуклых многоугольников. Выпуклая оболочка системы точек и ее использование в задачах.</p>
	Алгебра	12	<p>Задачи на движение, требующие введения нескольких переменных; использование неравенства Коши для двух чисел. Задачи о свойствах линейной функции и ее графике.</p> <p>Задачи на исследование алгебраических свойств квадратного трехчлена. Свойства многочленов с целыми коэффициентами, решение нелинейных уравнений в целых числах с применением алгебраических методов (разложения на множители, ФСУ, выделения полного квадрата).</p> <p>Задачи на неравенства о средних,</p>

			транснаравенство. Задачи на неравенства Коши — Буняковского — Шварца, лемму Титу
	Теория чисел	8	Задачи на нахождение инварианта в процессе; задачи на инварианты, связанные с теорией чисел (делимость, остатки). Использование теоретико-числовых знаний (степеней вхождения простых чисел (пример: доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$), метода бесконечного спуска, остатков от деления) при решении нелинейных уравнений в целых числах.
	Логика	10	Логические задачи, требующие построения отрицаний сложных высказываний, придумывания различающих вопросов. Логические задачи, использующие идею принципа крайнего; логические задачи на оценку и пример. Игры с более сложными стратегиями. Передача хода. Неконструктивное доказательство существования стратегии. Задачи на составление алгоритмов, работающих вне зависимости от промежуточных результатов работы алгоритма (на примере задач на взвешивание, угадывание, на клетчатых досках).

	Комбинаторика	10	Задачи о свойствах биномиальных коэффициентов, на взаимно-однозначные соответствия в комбинаторике. Комбинированные комбинаторные задачи, задачи о «шарах и перегородках». Формула включений-исключений для двух, трех, четырех множеств, ее обобщение на несколько множеств. Числовые и комбинаторно-геометрические задачи, использующие формулу включений-исключений.
	Комбинаторная геометрия	8	Задачи с использованием раскрасок и дополнительных разбиений досок на части для доказательства оценок. Задачи об эйлеровых и гамильтоновых путях в графах. Теоретико-числовые задачи на окружности, первообразный корень, порядок (показатель) числа по модулю. Задачи, приводящие к формуле Пика.

9 класс

2 ч в неделю, всего 68 ч

№	Название раздела	Кол-во часов	Основное содержание
	Арифметика		Задачи на последовательности, прогрессии, рекуррентные соотношения. Алгебраические и геометрические задачи с иррациональностями. Задачи с

		использованием порядка (показателя) числа по модулю, его свойства. Классы вычетов. Доказательство МТФ через показатели, системы вычетов.
	Геометрия	Задачи, связанные с треугольником Паскаля. Задачи на использование движений плоскости. Теорема Шаля. Применение гомотетии при решении задач. Применение теоремы синусов и теоремы косинусов при решении геометрических задач.
	Алгебра	Текстовые задачи, сводящиеся к решению систем линейных и нелинейных уравнений. Задачи на восстановление функций по значениям. Применение интерполяционного многочлена Лагранжа. Доказательство алгебраических неравенств с помощью перехода к соответствующим геометрическим задачам. Задачи на применение функции Эйлера и ее свойств (значения для простых чисел, мультипликативность), теоремы Эйлера. Задачи на использование теоремы Безу, теоремы Виета для уравнений высших степеней. Понятие асимптотики на примере зависимости поведения многочлена от знака его старшего коэффициента.

			Использование метода Штурма для доказательства неравенств.
	Теория чисел		Стратегии, получаемые с помощью двоичной системы счисления. Игра Ним.
	Логика		Логические задачи, связанные с другими областями математики (графы, теория чисел). Задачи о процессах, в которых есть полуинвариант (величина, значение которой монотонно изменяется в ходе процесса). Задачи на ММИ с более сложными схемами. Примеры неправильного использования ММИ. Применение ММИ в неалгебраических задачах. Доказательство неравенства о средних для нескольких чисел с использованием ММИ и его использование при доказательстве неравенств.
	Комбинаторика		Использование понятие изоморфизма множеств для упрощения подсчета числа вариантов. Задачи с использованием бинома Ньютона. Задачи с планарными графами, применение формулы Эйлера для связного планарного графа.
	Комбинаторная геометрия		Задачи на использование критериев существования эйлера пути,

		<p>эйлерова цикла в графе, разбиение графа в объединение простых путей и циклов. Доказательство формулы Пика. Индукция в комбинаторно-геометрических задачах. Задачи на применение формулы Пика. Задачи на использования критериев существования гамильтонова пути и цикла в графе. Примеры графов без гамильтоновых циклов. Гамильтоновы пути в ориентированных графах. Задачи с использованием понятия хроматического числа графа. Задачи на использование опорной прямой многоугольника, выпуклой оболочки системы точек.</p>
--	--	--